Taylor 展開

関数 $f(x)$ は以下のように整関数に展開できる。

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= [f(t)]_a^x \\
&= \int_a^x f'(t)dt \\
&= \int_a^x 1 \cdot f'(t)dt \\
&= \int_a^x (t-x)' \cdot f'(t)dt \\
&= [(t-x)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt \\
&= 0 - (a-x)f'(a) - \int_x^a \left(\frac{(t-x)^2}{2}\right)' f''(t)dt \\
&= (x-a)f'(a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \\
&= (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \int_x^a \frac{1}{2}\left(\frac{(t-x)^3}{3}\right)' f^{(3)}(t)dt \\
&= (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(t-x)^3 f^{(3)}(t)\right]_a^x \\
&\quad - \int_a^x \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{(t-x)^4}{4}\right)' f^{(4)}(t)dt \\
&= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} f^{(3)}(t)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

したがって、これより

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

となる。