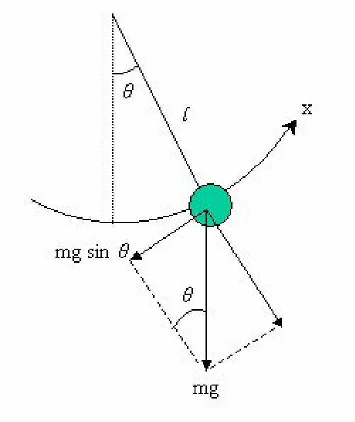
単振り子



図のように座標軸をとる。球の質量を m とすると、運動方程式は次のように書かれる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{1}$$

また、関係式

$$x = l\theta \tag{2}$$

が成り立つ。(2) を (1) に代入して

$$\begin{aligned} ml\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mg\sin\theta \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\omega^2\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで $\omega^2 \equiv l/g$ である。

(3) において θ が十分に小さいとき、$\sin\theta \simeq \theta$ が成り立つので

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \tag{4}$$

と書ける。この微分方程式は簡単に解くことができて、その一般解は

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \\ &= C\sin(\omega t + \alpha) \\ &= D\cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{5}$$

のように書かれる。初期条件として $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$、$\theta' = 0$ をとれば

$$\theta(t) = \frac{\pi}{6}\cos(\omega t) \tag{6}$$

となる。(2) を用いれば、

$$x(t) = \frac{\pi}{6}l\cos(\omega t) \tag{7}$$

となる。なお、(3) にも解析解は存在する。